



С.С. Кутателадзе

### Семен Самсонович Кутателадзе

Российская академия наук, Сибирское отделение, Институт математики им. Соболева, профессор, доктор физико-математических наук, e-mail: sskut@math.nsc.ru

## МЫСЛИ О МАТЕМАТИКЕ

\* Математика изучает формы мышления – как количественные, так и качественные.

\* Математика – наука о бесконечных возможностях конечного человека.

\* Математика – наука во многом гуманитарная или, в другой терминологии, неестественная. Отличительная особенность математики – стремление к полной элиминации субъекта.

\* Сравнения математики с физикой или лингвистикой натянуты.

\* Пуанкаре говорил, что математика – это искусство давать одно и то же название разным вещам. Отсюда следует, что одна и та же вещь может получить несколько разных имен. В этом ловушка для дилетантов: изобретать новые названия для известных вещей – не математика.

\* Наука сочетает в себе и Вавилонскую башню, и пирамиду Хеопса. Многообразие диалектов науки не ведет к ее разрушению. Немалую роль в сохранении единства науки играет математика. Наука начинается с математики – зарубки на костях палеолита тому бесспорное свидетельство.

\* Математик ищет общее в разном. Жулик выдает одно за другое.

\* Математик сегодня – тот, кто знает доказательство хотя бы одной из теорем Гельфанда.

\* А.А. Марков старший протестовал против решения Синода по поводу Л.Н. Толстого и был отрешен от церкви по собственному заявлению в этой связи. Слово математика не слышно, когда его замалчивают или зашикивают.

\* Математика столь же вариативна, как и все мышление. Математический аппарат подбирается исследователем в рамках изучаемой модели реального или идеального феномена. Никакие дискурсы и никакие опыты внутри и вокруг математики не превращают ее в экспериментальную науку вопреки многим противоположным суждениям.

\* Математика заслужила доверие людей.

\* Свобода в математике – отказ от категоричности.

\* Первый трансфинитный акт человечества – рождение идеи всей совокупности натуральных чисел. От сочинений Аристотеля и «Псаммита» Архимеда идея бесконечности в центре интеллекту-

альных поисков ученых всех времен и народов.

\* Понимание математики как науки о бесконечном имеет религиозные корни.

\* Математика была и остается ремеслом формул, искусством вычисления, наукой исчислять.

\* Анализ возник как дифференциальное и интегральное исчисление. Дифференцирование – определение тенденций, а интегрирование – предсказание будущего по тенденциям.

\* Геометрия и топология – исчисление пространственных форм.

\* Алгебра – исчисление неизвестных, а логика – исчисление истин и доказательств.

\* Теория вероятностей – исчисление шансов, а статистика – исчисление данных.

\* Арифметика была предисторией математики, которая родилась как эллинская геометрия, превратилась в ориентальную алгебру и стала окцидентальным анализом. XX век продемонстрировал плоды воссоединения ипостасей математики с помощью теории множеств, давшей вопреки своим намерениям толчок крайнему догматизму.

\* Теория моделей оценивает и перечисляет истины и доказательства.

\* Логика раскрепощает математику посредством теории моделей.

\* Математика становится логикой.

\* Логика организует и упорядочивает мышление, освобождая нас от консерватизма при выборе объектов и методов исследования. Логика наших дней – важнейший инструмент и институт свободы.

\* «Das {it Wesen} der {it Mathematik} liegt gerade in ihrer {it Freiheit}». Следовательно, сущность математики заключена в его свободе.

\* Математика – наука о простейших и универсальных формах мышления. Язык – способ существования и передачи форм мышления. Известное суждение «математика – это язык» указывает только на особую роль математики в системе наук.

\* Поиск естественных границ и новых сфер применимости формул – одна из важнейших и древнейших математических технологий. Формулы абстрактнее авторов, и авторы не могут видеть все содержание своих формул и пределы их действия.

\* Идея двойственности двойственна в себе: ин-

дивидуальная двойственность пар выпуклых объектов сосуществует с коллективной двойственностью классов таких объектов.

\* Функциональный анализ возник как нелинейный и в некотором смысле выпуклый анализ. Выпуклый анализ по самому понятию слов есть яркий раздел математического анализа. Антонимом выпуклости служит не вогнутость, а блеклость или поверхностность.

\* Число – мера количества. Исчисление – сведение к числу.

\* Истина – состояние мышления. Доказательство – способ мышления.

\* Утрата определенности – колоссальное приобретение математики, освобождение от шор категоричности.

\* Отказ от единственности и стремление к единству – биколор математики XX века.

\* Изоморфность – никакое не основание для унификации имен. Наоборот, чтобы говорить об изоморфизме, желательно иметь две вещи (то есть и два имени). Не случайно математику считают искусством говорить одно и то же разными словами.

\* Алгоритм – артефакт математической технологии.

\* Исчисление интенционально.

\* Между алгеброй и геометрией нет двойственности. Алгебра и геометрия существуют в единстве.

\* Есть задачи, которые мы не решаем, – мы не знаем, что такое пространство, и не знаем, что такое оператор.

\* Теория «математического сверхчеловека» – точка зрения, состоящая в том, что более сильному математику позволено в жизни больше, нежели более слабому, что люди не равны перед минимальными требованиями морали и нравственности. Именно эту идеологию Гротендик называет меритократической и люто ненавидит.

\* Математик не всезнайка и не фокусник. Математик – тот, кто отличает доказанное от недоказанного. Математика требует доказательств и тем самым «ум в порядок приводит».

\* Основатель теории категорий Маклейн пропагандировал термин «работающий математик». Английский оригинал «the working mathematician» гораздо ближе к более приземленному выражению «мате\-ма\-тик-работяга». Математической работе Маклейн противопоставлял совершенную математику. Последняя должна быть неизбежной, проясняющей, глубокой, уместной, отвечающей на вопросы и своевременной. Совершенную математику делают совершенные математики, математики *par excellence*.

\* Различение пространственных форм предметов предшествует их пересчету. Люди всегда знали разницу между сквозным проходом и пещерой. Они разбирались в кривизне склонов и направлениях обхода задолго до того, как овладели искусством зарубок. Топологические понятия у человека первичны. Они предвараля арифметику ординального и карди-

нального счета. Геометрия, связанная с инвариантами движений, возникла через десятки тысяч лет в эпоху письменности.

\* Определения Евклида отражают геометрическое видение его эпохи. Геометрия – часть культуры древнего мира. Следы эпохи отражаются в самых абстрактных ее понятиях. Вне исторического контекста трудно понять не только современные понятия типа нанотехнологий и квантовой логики. Приметы времени отражены в эволюции любой системы научных понятий. Геометрия возникла как ответ на разнообразные потребности человека. Ее мистические, познавательные и экономические источники сосуществовали в едином культурном пространстве человека того времени. Важным источником геометрии было землеустройство, составление кадастров и соответствующее налогообложение. Знаменитые гарпедонапты Египта были налоговыми служащими, использовавшими веревку для обмера земельных наделов. Навыки гарпедонаптов использовались и в строительстве.

\* Пирамиды построены задолго до их геометрического определения.

\* Удивительна история абстрактных понятий точки, числа, фигуры и тела, пришедших к нам из глубины веков. Мы редко отдаем себе отчет в том, что школьные арифметика и геометрия несут нам дорогое интеллектуальное наследие наших наидревнейших предков. Нет современного человека, который не знает, что такое треугольник. Однако мало людей владеет определением этого понятия. Это далеко не случайно – такого определения нет у Евклида. Он говорит о трехсторонних фигурах, поясняя, что «фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ». Ясно, что это определение навеяно технологией землемера. Полезно отметить, что институт собственности много древнее геометрии. Измерять участок, находясь за его пределами, – это одно, а заходить внутрь надела – дело совсем иное. Еще больше ограничений было у древних геометров при обмере строительных сооружений, таких как пирамиды. Ясно, что о внутреннем устройстве пирамиды Хеопса гарпедонапты старались не задумываться или, во всяком случае, не говорить об этом публично.

\* В современных терминах мы говорим, что Евклид рассматривал выпуклые фигуры. С нашей точки зрения понятие выпуклости вполне элементарно. Фигура является выпуклой, если каждый отрезок, соединяющий любые две точки этой фигуры, не выходит за ее пределы. Удивительно, что такому определению чуть более ста лет. Треугольник в наши дни принято определять как выпуклую оболочку трех точек, то есть как наименьшую выпуклую фигуру, эти точки содержащую. Если вбить в землю три колышка и стянуть лассо, петля которого охватывает эти колышки, мы очертим треугольник. Так делали и гарпедонапты, однако внутренность измеряемого участка могла быть недоступна: попытка натягивать веревки внутри чужого участка –

это покушение на частную собственность.

\* В геометрии древних основные объекты выпуклы, так как результаты обмера веревкой участков, граница которых выделена колышками. Измерение – сведение к числу, предок анализа. Основные числовые величины геометрии – периметр и площадь выпуклых многогранников и комбинаций и частей простейших выпуклых фигур типа шаров или луночек. Теоретическая геометрия древних изучала свойства конкретных выпуклых фигур. Основная задача прикладной геометрии – построения циркулем и линейкой. Найти – значит построить. В то время нет ни общей идеи переменной величины, ни задачи о поиске наилучшей формы, ни особой роли теорем существования и единственности. Изопериметрия живет как свойство шаров, правильных многогранников и т. п. в форме изопериметрических неравенств. Идеи существования и единственности, вариационное исчисление – продукты рубежа XVII и XVIII вв., инспирированные христианством и абсолютизмом.

\* Выпуклое множество в общем положении – решение системы линейных неравенств, т. е. пересечение полупространств – полных телесных углов. Так мы понимаем это сегодня, не задумываясь о новизне такого понимания – это продукт времен Фурье. Современные представления о выпуклой фигуре и выпуклой функции складываются на переломе XIX и XX вв. Главные идеи здесь принадлежат Гильберту и Минковскому. Гильберт объединил греческую геометрию и теорию множеств Кантора. Минковский синтезировал абстрактную теорию чисел и наглядную геометрию, расширив понятие метрической функции. Пуанкаре, Гильберт и Эйнштейн объединили идеи новой физики и геометрии. Возник функциональный анализ, немислимый без выпуклых тел и трансфинитных концептов.

\* Древние понимали особый статус начала счета. Для того чтобы перечислять, надо обособить перечисляемые сущности и только потом сопоставить их с символическим рядом числительных. Мы приступаем к счету тем, что «многое делаем единым». Особая роль акта начала счета нашла отражение в почти тысячелетнем диспуте о том, считать единицу (или монаду) натуральным числом или нет. Сейчас нам кажется чрезмерной особая щепетильность в выделении специальной роли единицы-монады. Между тем так было далеко не всегда.

\* Монады Лейбница, флюксии и флюэнты Ньютона – продукты героической эпохи телескопа и микроскопа. Универсум фон Неймана, возникший в середине XX века, реализует пифагорейский тезис «все есть число». Измерение бесконечности числом – суть гениальных работ Кантора.

\* В центре математики начала XX века первым стоял финитизм Гильберта и лишь вторым его доклад. Только после теорем Геделя ушла иллюзия скорого наведения порядка в основаниях. Понимание некатегоричности мышления укрепилось и дало всходы новых дисциплин, свободно использующих

якобы туманные средства выбора, континуума, неистребимой неполноты.

\* История неевклидовой геометрии имеет массу недомолвок, передержек и искажений в связи с ролью Германии в развязывании двух мировых войн. Интерес к проблематике подлинной геометрии пространства у Гаусса и его друга Больяи-старшего восходит к Аврааму Кестнеру, почти неизвестному в России выдающемуся ученому и литератору Германии. Гаусс владел дифференциальной геометрией, ибо создал ее, и поэтому отрицательная (гауссова) кривизна для него была менее, чем загадкой. Попытки изобразить Гаусса завистником Яноша Больяи или Лобачевского – политические искажения. Гаусс поддерживал с вершин своего гения молодые таланты – сына своего приятеля и талантливого русского. При всем при том Лобачевский – гордость русской науки, и его имя сохраняется в математике вполне заслуженно.

\* Геометрию интересуют как качественные, так и количественные свойства пространственных форм и отношений. Примеры качественных геометрических знаний дают признаки равенства треугольников. Нахождение площадей, длин и объемов – образцы количественных исследований. Выдающимся открытием евклидовой геометрии стала несоизмеримость стороны и диагонали квадрата.

\* Наука впервые столкнулась с проблемой исчисления континуума в глубокой древности. Обнаружив отсутствие общей меры у стороны и диагонали квадрата, наши предки выяснили, что рациональных чисел недостаточно для практических измерений. Полезно помнить, что рациональных чисел столько же, сколько и натуральных. Рациональные числа заполняют счетное множество, то есть служат разновидностью того же кардинального числа, которым мы сегодня характеризуем запас элементов натурального ряда. Наидревнейшая идея потенциальной бесконечности в форме последовательно продолжающегося счета оказалась недостаточной для количественного анализа в геометрии. Открытие несоизмеримости стороны и диагонали квадрата такая же высочайшая вершина математики, как независимость пятого постулата, аксиомы выбора или гипотезы континуума.

\* Лейбниц и Ньютон открыли одинаковые формулы, часть из которых была известна и до них. Как Лейбниц, так и Ньютон обладали своим особым приоритетом в создании дифференциального и интегрального исчисления. Дело в том, что эти ученые предлагали варианты математического анализа, основанные на принципиально различных подходах. Лейбниц строил анализ на актуальных бесконечно малых, а у Ньютона центральную роль играл «метод первых и последних отношений».

\* Судьба все расставляет на свои места – механистические идеи Ньютона заняли почетное место в залах второго ряда истории естествознания, уступив центральную анфиладу воззрениям Эйнштейна.

\* Научный оптимизм Лейбница, его мечта о  $\{it$

calculemus} и вера в лучший из миров становятся все более и более востребованными. Удивительно – умерший бюрократом и лжеученым, окруженным почётом льстецов, Ньютон уступает место в умах людей несчастному оплеванному Лейбницу, на похороны которого пришло два человека.

\* Ньютон – последний ученый-маг. Лейбниц – первый математический мечтатель.

\* Дифференциальное исчисление начиналось как техника конечных разностей – на дискретный инфинитезимальный каркас была натянута непрерывная оболочка.

\* Тезис Евклида об отсутствии царских путей в математику относится и к компьютеру.

\* Компьютер не грейдер, а внедорожник.

\* Видеть общее в разном – значит обобщать.

\* Решение «приличного» линейного уравнения не всегда есть правая часть уравнения. Хотя это всегда так с точностью до изоморфизма.

\* Математика – дело важное, но научное. Первично у каждого – человеческое. Человек много шире своей социальной роли. Пушкин, Ахматова и Пастернак больше своей поэзии в той же мере, в какой Лузин, Колмогоров и Арнольд больше своей математики.

\* Математики, как показывает время, обречены на забвение. Евклида и Ньютона ученые ценят, но почти никто из представителей точного знания их не читает. Нематематики в большинстве забыли Минковского, Пуанкаре и Гильберта, ибо математику не так понимают, как математики.

\* Ряд и уравнение – близкие метаматематические понятия. Уравнение – равенство с вопросом, а ряд – последовательность с вопросом.

\* Терминологические нюансы существенны, ибо отражают повороты истории. Так, в теории меры отсутствует понятие соизмеримости, ключевое в античные времена. В математике есть и теория линейных уравнений, и теория линейных неравенств, а теории линейных равенств нет.

\* Теория линейных уравнений не является частным случаем теории линейных неравенств хотя бы потому, что не каждое равенство есть толкование какого-либо набора неравенств.

\* Неравенство – первичный феномен бытия. Равенство исторически вторично, вопреки лингвистике.

\* Математика гораздо менее философична, чем представляется философам. Она связана с простейшими формами сознания и далеко не всегда с формализмами. Скажем, Рамануджана никакие формализмы не интересовали, как и всю автохтонную индийскую математику. Понять как и что – это одно, а доказать – совсем другое. Тезис Бурбаки о тождественности доказательства и математики имеет весьма ограниченное значение в современном существовании математики. Бездоказательная – экспериментальная и познавательная – математика вездесуща и никакой философской или формаль-

ной истиной не оперирует. Знание превалирует над доказательством и пониманием.

\* Математика не состоит в выводе следствий из аксиом, то есть не является теорией в формальном смысле математической логики. Математика не аксиоматическая система и никогда таковой не была. Индийская математика (включая Рамануджана) – яркое тому свидетельство. Нет ничего аксиоматического ни у Эйлера, ни у Коши.

\* Математика во многом гуманитарная наука. Наверное, простейшая и наиболее защищенная от субъективизма из неэкспериментальных, умозрительных наук и потому царица гуманитарного знания. У людей нет другого знания, кроме гуманитарного...

\* Аксиоматический метод – своего рода несложная логическая гигиена. Но этот метод не всесилен и всегда надстройка над имеющимся знанием. Формулы Эйлера не продукты вывода чего-то из аксиом, а результат человеческого понимания, лишённого какого-либо субъективного элемента.

\* Объективное исследование субъективных абстракций человека в наиболее рафинированной из доступных субъекту форм – вот что такое математика.

\* Математика занята формами мышления, а экономика – кошелками и кошельками.

\* Все знают, что математика ум в порядок приводит. Менее известно, что математику в порядок приводит ум.

\* Первично мышление, математическое в мышлении вторично.

\* Математический дар – очень малый ресурс жизни.

\* Между наукой и властью лежит пропасть отчуждения. Власть противостоит свободе, составляющей сущность как математики, так и науки в целом.

\* Математика не сводится ни к финитизму, ни к интуиционизму, ни к дескрипции. Она не категорична, она свободна.

\* У математики врожденный иммунитет к лженауке.

\* В математике плагиат в чистом виде такая редкая вещь, что с ней столкнуться можно пару раз за десятки лет. В математике этические нормы размышляются иначе – ликвидируют должные ссылки на соавторов при переиздании сочинений, защищают неверные работы угодных людей и проваливают негодных, имитируют результаты и т. п. Строгая форма научных публикаций в математике предохраняет ее от плагиата.

\* Решение проблемы континуума ведет к освобождению математики от догматизма и категоричности.

\* Математиком быть не стыдно. Стыдно быть только математиком.

25 апреля 2020 г.