



Д. ф.-м. н., профессор
С.С. Кутателадзе
(Институт математики
им. С. Л. Соболева)

ЭВРИСТИКА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С.С. Кутателадзе

О методике Л.В. Канторовича и ее роли в формировании современных математико-экономических методов.

Линейное программирование – один из основных разделов современной математической экономики. Эта банальная констатация была бы совершенно невысказана в принципе еще 100 лет назад.

МАТЕМАТИКА И ЭКОНОМИКА

Математика изучает формы мышления. Предмет экономики – обстоятельства человеческого поведения. Математика абстрактна и доказательна, а профессиональные решения математиков не задевают обычную жизнь людей. Экономика конкретна и декларативна, а практические упражнения экономистов основательно жизнь меняют. Цель математики – безупречные истины и методы их получения. Цель экономики – индивидуальное благополучие и пути его достижения. Математика не вмешивается в личную жизнь человека. Экономика задевает его кошелек и кошелку. Список капитальных различий математики и экономики бесконечен.

Математическая экономика – новация двадцатого века. Именно тогда возникло понимание того, что экономические проблемы требуют совершенно нового математического аппарата.

Человек разумный всегда был, есть и будет человеком хозяйствующим. Практическая экономика для каждого из нас и наших предков – это арена здравого смысла. Здравый смысл представляет собой особую способность человека к мгновенным оценочным суждениям. Понимание выше здравого смысла и проявляется как осознанная адаптивность поведения. Понимание не наследуется и, стало быть, не принадлежит к числу врожденных свойств. Уникальной особенностью человека является способность пониманием делиться, превращая оценки в материальные и идеальные артефакты.

Культура – сокровищница понимания. Инвентаризация культуры – суть мировоззрения. Здравый смысл субъективен и родствен духовному подъему веры, то есть силе, превышающей

возможности фактов и логики. Проверка суждений с помощью фактов и логики – критический процесс, освобождающий человека от ошибок субъективизма. Наука – трудный путь объективизации понимания. Религиозное и научное мировоззрения отличаются по сути способом кодификации артефактов понимания.

Становление науки как инструмента понимания – долгий и сложный процесс. Зарождение ординального счета фиксировано палеолитическими находками, отделенными десятками тысяч лет от явления разумного и хозяйствующего человека. Экономическая практика предваряет предысторию математики, сформировавшуюся в науку доказательных вычислений в Древней Греции примерно 2500 лет тому назад.

Целенаправленное поведение людей в условиях ограниченных ресурсов стало объектом науки совсем недавно. Датой рождения экономики как науки принято считать 9 марта 1776 г. – день публикации сочинения Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов».

ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА МЫШЛЕНИЯ

Идеи правят миром. Эту банальную констатацию когда-то с глубокой иронией дополнил Джон Мейнард Кейнс. Свой капитальный труд «Общая теория занятости, процента и денег» он завершил крылатым афоризмом: «Практические люди, мнящие себя совершенно неподверженными никаким интеллектуальным влияниям, обычно являются рабами какого-нибудь замшелого экономиста».

Политические идеи направлены на власть, экономические – на свободу от власти. Политическая экономия неразрывна не только с экономической практикой, но и с практической политикой. Политизированность экономических учений характеризует их особое положение в мировой науке. Изменчивость эпох, их технологических достижений и политических предпочтений отражается в широком распространении эмоцио-

нального подхода к экономическим теориям и ставит экономику в положение, немислимое для остальных наук. Помимо благородных причин, для этого есть и одна довольно циничная: как бы ни меняли достижения точных наук жизнь человечества, они никогда не затрагивают обыденное сознание людей столь живо и остро, как суждения об их кошельках и свободах.

Наука – чувственно-сверхчувственный артефакт в том смысле, что ее содержание раскрывается только человеком и без человека, по меньшей мере, вполне понято быть не может. Расположенная в самом центре культуры, наука напоминает «Вавилонскую башню» – наивный, но героический и великий проект народов Земли. Стремление к свободе, внутренне присущее человеку, проявляется в неистребимой жажде знания. «Мы должны знать, мы будем знать» – этот уже вековой тезис Давида Гильберта лежит в кладовой здравого смысла.

Георг Кантор, создатель теории множеств, еще в 1883 г. заметил, что «сущность математики заключена в ее свободе». Свобода математики отнюдь не сводится к отсутствию экзогенных ограничений на объекты и методы исследования. Свобода математики в немалой мере проявляется в предоставляемых ею новых интеллектуальных средствах овладения окружающим миром, которые раскрепощают человека, раздвигая границы его независимости. Математизация экономики – неизбежный этап пути человечества в царство свободы.

Девятнадцатый век отмечен первыми попытками применения математических методов в экономике в работах Антуана Огюста Курно, Карла Маркса, Уильяма Стенли Дживонса, Леона Вальраса и его преемника по Лозаннскому университету Вильфредо Парето.

В двадцатом веке к экономической проблематике обратились математики первой величины – Джон фон Нейман и Леонид Канторович. Первый развил теорию игр как аппарат изучения экономического поведения, а второй разработал линейное программирование как аппарат принятия решений о наилучшем использовании ограниченных ресурсов. Значение исследований фон Неймана и Канторовича далеко выходит за рамки их выдающихся технических результатов. Их достижения показали, что современная математика предоставляет самые широкие возможности для экономического анализа практических проблем. Экономика приблизилась к математике. Оставаясь гуманитарной, она стремительно математизируется, демонстрируя высокую самокритичность и незаурядную способность к объективным суждениям.

Поворот в мышлении человечества, осуществленный фон Нейманом и Канторовичем, не

всегда достаточно осознается. Между точным и гуманитарным стилями мышления существуют принципиальные различия. Люди склонны к рассуждениям по аналогии и методу неполной индукции, рождающим иллюзию общезначимости знакомых приемов. Различия научных технологий не всегда выделены отчетливо, что, в свою очередь, способствует самоизоляции и вырождению громадных разделов науки.

Методологическую пропасть, зиявшую между экономистами и математиками, к 1920-м годам четко обозначил Альфред Маршалл, основатель кембриджской школы неоклассиков, «маршаллианцев». Он последовательно противопоставлял экономическое и математическое мышление, призывая строить многочисленные короткие «гребешки» рассуждений в конкретном экономическом анализе. Ясно, что образ «гребешка» не имеет ничего общего с представлением о перевернутой пирамиде – кумулятивной иерархии универсума фон Неймана, в котором обитает современная теория множеств. Красота и сила математики со времен Древней Эллады до наших дней связаны с аксиоматическим методом, предполагающим вывод новых фактов с помощью сколь угодно длинных цепей формальных импликаций.

Бросающаяся в глаза разница в менталитете математиков и экономистов затрудняет их взаимопонимание и сотрудничество. Невидимы, но вездесущи перегородки мышления, изолирующие математическое сообщество от своего экономического визави. Этот статус-кво с глубокими историческими корнями всегда был вызовом для Канторовича, противоречащим его тезису о взаимопроникновении математики и экономики.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Научное наследие Канторовича огромно. Его исследования в области функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций оказали фундаментальное влияние на становление и развитие названных дисциплин. Он по праву входит в число основоположников современной математической экономики.

Канторович – автор более трехсот научных работ, которые при подготовке аннотированной библиографии его сочинений он сам предложил распределить по следующим девяти разделам: дескриптивная теория функций и теория множеств, конструктивная теория функций, приближенные методы анализа, функциональный анализ, функциональный анализ и прикладная математика, линейное программирование, вычислительная техника и программирование, оптимальное

планирование и оптимальные цены, экономические проблемы плановой экономики.

Столь впечатляющее многообразие направлений исследований объединяется не только личностью Канторовича, но и его методическими установками. Он всегда подчеркивал внутреннее единство науки, взаимопроникновение идей и методов, необходимых для решения самых разнообразных теоретических и прикладных проблем математики и экономики.

Характерной чертой творчества Канторовича была ориентация на наиболее трудные проблемы и самые перспективные идеи математики и экономики своего времени.

Главным открытием Канторовича в области математико-экономических методов стало линейное программирование, которое теперь изучают десятки тысяч людей во всем мире. Под этим термином скрывается колоссальный раздел науки, посвященный линейным оптимизационным моделям. Иначе говоря, линейное программирование – это наука о теоретическом и численном анализе и решении задач, в которых требуется найти оптимальное значение, т.е. максимум или минимум некоторой системы показателей в процессе, поведение и состояние которого описывается той или иной системой линейных неравенств.

В 1939 г. выходит в свет знаменитая брошюра Канторовича «Математические методы организации и планирования производства», ознаменовавшая рождение линейного программирования. В 1940-е годы на поверхности научного информационного потока экономические работы Канторовича практически не публикуются. Однако в его творчестве экономическая проблематика выходит на первый план.

Уже в военные годы он завершает работу над первым вариантом книги «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов». Эта работа опережала время и настолько не соответствовала догматам господствующей политической экономии, что ее публикация оказалась возможной только в 1959 г. Пионерские идеи Канторовича были легализованы и начали использоваться в экономической практике.

Термин «линейное программирование» был предложен в 1951 г. американским экономистом Т. Купмансом. В 1975 г. Канторович и Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам с формулировкой «за их вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Особой заслугой Купманса стала пропаганда

методов линейного программирования и защита приоритета Канторовича в открытии этих методов.

В США линейное программирование возникло в 1947 г. в работах Джорджа Данцига. Поучительно привести его слова об истории линейного программирования¹:

«Русский² математик Л.В. Канторович на протяжении ряда лет интересовался применением математики к задачам планирования. В 1939 г. он опубликовал обстоятельную монографию под названием «Математические методы организации и планирования производства»... Канторовича следует признать первым, кто обнаружил, что широкий класс важнейших производственных задач поддается четкой математической формулировке, которая, по его убеждению, дает возможность подходить к задачам с количественной стороны и решать их численными методами...»

Канторович описал метод решения, основанный на имеющемся первоначально допустимом решении... Хотя двойственные переменные и не назывались «ценами», в целом идея метода состоит в том, что выбранные значения этих «разрешающих множителей» для недостающих ресурсов можно довести до уровня, когда становится целесообразной переброска ресурсов, являющихся избыточными...»

Следует подчеркнуть, что с оптимальным планом любой линейной программы автоматически связаны оптимальные цены или «объективно обусловленные оценки». Последнее громоздкое словосочетание Канторович выбрал из тактических соображений для повышения «критикоустойчивости» термина.

Взаимозависимость оптимальных решений и оптимальных цен – такова краткая суть экономического открытия Канторовича.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЭВРИСТИКА

Целостность мышления проявлялась во всем творчестве Канторовича. Идеи линейного программирования были тесно связаны с его методологическими установками в области математики. В середине 1930-х годов центральное место в математических исследованиях Канторовича занимал функциональный анализ. Главным своим математическим достижением в этой области Канторович считал выделение специального класса порядково полных упорядоченных векторных пространств, которые в отечественной литературе именуют **K**-пространствами или пространствами Канторовича³.

¹ Данциг Дж. Б. *Линейное программирование, его обобщения и применения*. Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1966. С. 29.

² В указанном выше переводе стоит слово «советский», а в английском оригинале «Russian».

³ В рабочих тетрадях Канторович писал о «моих пространствах».

Уже в первой своей работе в новой области математики, датированной 1935 г., Канторович писал: «В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Так была впервые сформулирована важная методологическая установка, которую теперь называют эвристическим принципом Канторовича. Следует подчеркнуть, что в определении линейного полуупорядоченного пространства Канторовичем была включена аксиома условной порядковой полноты, обозначенная I_6 . Роль K -пространств Канторович продемонстрировал на примере теоремы Хана – Банаха. Оказалось, что в этом центральном принципе функционального анализа можно реализовать принцип Канторовича, т. е. заменить вещественные числа элементами произвольного K -пространства, а линейные функционалы — операторами со значениями в таком пространстве.

Эвристический принцип Канторовича нашел многочисленные подтверждения как в его собственных исследованиях, так и в работах его учеников и последователей. Этот принцип оказался путеводной идеей, приведшей к глубокой и изящной теории K -пространств, богатой разнообразными приложениями.

Еще в середине прошлого века предпринимались попытки формализации эвристического принципа Канторовича. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов K -пространства. В то же время оставался совершенно неясным внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы его применимости, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классическими математическими дисциплинами.

Абстрактные идеи Канторовича в теории K -пространств связаны с линейным программированием и приближенными методами анализа. Современные исследования подтвердили, что идеи линейного программирования имманентны теории K -пространств. Можно доказать, что выполнение любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности линейного программирования в абстрактной математической структуре с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является K -пространством.

Эвристика Канторовича связана с одной из самых ярких страниц математики прошлого века – со знаменитой проблемой континуума. Как известно, множество имеет мощность континуума, если оно находится во взаимнооднозначном соответствии с отрезком числовой прямой. Гипотеза континуума состоит в том, что любое подмножество отрезка либо счетно, то есть допускает пересчет, либо имеет мощность континуума. Проблема континуума состоит в ответе на вопрос о справедливости или ложности гипотезы континуума.

Гипотеза континуума была впервые высказана Георгом Кантором в 1878 г. Он был убежден в том, что эта гипотеза является теоремой, и всю жизнь тщетно пытался ее доказать. Первой в знаменитом докладе Гильберта стоит проблема континуума. Оставаясь нерешенной десятилетиями, она породила глубокие исследования в основаниях математики. В результате более чем полувековых усилий мы теперь знаем, что гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута. Прогресс булевозначного анализа, возникшего в связи с осмыслением гипотезы континуума⁴, продемонстрировал фундаментальное значение расширенных K -пространств. Каждое из таких пространств, как оказалось совершенно неожиданно, служит равноправной моделью вещественной прямой и, значит, играет в математике ту же фундаментальную роль. Пространства Канторовича дали новые модели поля вещественных чисел и обрели бессмертие.

Эвристика линейного программирования постоянно получает блестящее подтверждение, доказывая целостность науки и неизбежность взаимопроникновения математики и экономики.



⁴Подробности см. в монографии: Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ. – М.: Наука, 2005.