



Д.ф.-м.н., профессор  
С.С. Кутателадзе

## Сергей Соболев, Поран Шварц — создатели теории распределений (к 95-летию со дня рождения С.Л.Соболева)

С.С. Кутателадзе

*В истории математики немало людей, которых мы вспоминаем парами. Среди них Евклид и Диофант, И.Ньютон и Г. В.Лейбниц, Я.Больяи и Н.И.Лобачевский, Д.Гильберт и А.Пуанкаре, Н.Бурбаки и В.И.Арнольд. В этом ряду стоят С.Л.Соболев и Л.Шварц, имена которых неразрывно связаны с одним из самых ярких математических достижений XX века — теорией распределений или обобщенных функций, предложившей принципиально новый подход к исследованию уравнений в частных производных.*

*Наиболее законченные и востребованные математические достижения воплощены в формулах и перечнях, списках объектов. Между списками и формулами есть принципиальные отличия. Перечни фиксируют то, что нам открыто. Списки платоновых тел, элементарных катастроф, простых конечных групп сродни «Альмагесту» и гербариям. Они составляют объекты восхищения, совершенные и застывшие. Предмет математического ремесла — формулы. Формула возникает как материализация математического творчества, она живет своей особой жизнью и имеет самостоятельную судьбу. Формулу редко используют только по ее прямому назначению. Отчасти формула похожа на домашний прибор, игрушку или программное обеспечение. Редко кто читает инструкцию по применению нового телевизора или описание правил пользования новой программой — гораздо чаще эти обновления осваивают экспериментально, нажимая подходящие клавиши и кнопки. Так же принято подходить и к формулам. Их «крутят», подставляют в них новые параметры, по-своему трактуют входящие в них символы и т.п.*

*Математика — ремесло формул, искусство исчисления. Тем, кому эта констатация кажется слабой и неполной, можно напомнить, что в логическом плане теория множеств представляет из себя некоторую разновидность узкого исчисления предикатов.*

*Теория распределений стала новым дифференциальным исчислением нашего времени. Таков масштаб научного открытия, связанного с именами С.Л.Соболева и Л.Шварца.*

### СЕРГЕЙ ЛЬВОВИЧ СОБОЛЕВ

Сергей Львович Соболев родился 6 октября 1908 г. в Петербурге в семье присяжного поверенного Льва Александровича Соболева. Дед Сергея Львовича со стороны отца был потомственным сибирским казаком.

Сергей Львович рано потерял отца, и его воспитывала мать, Наталья Георгиевна, высокообразо-

ванный преподаватель литературы и истории. Наталья Георгиевна имела и вторую специальность: она окончила медицинский институт и работала доцентом 1-го Ленинградского медицинского института. Мать привила С.Л.Соболеву принципиальность, честность и целеустремленность, которые характеризовали его как ученого и человека.

Программу средней школы Сергей Львович Соболев освоил самостоятельно, особенно увлекаясь математикой. В годы гражданской войны он вместе с матерью жил в Харькове. Переехав в 1923 г. из Харькова в Петроград, Сергей Львович поступил в последний класс 190-й школы. В 1924 г. С.Л. Соболев окончил школу с отличием, но поступить в университет не смог по возрасту и стал учиться в Первой государственной художественной студии по классу фортепьяно.

В 1925 г. С.Л. Соболев поступил на физико-математический факультет Ленинградского университета, не прерывая занятий. В ЛГУ Сергей Львович слушал лекции профессоров Н.М. Гюнтера, В.И. Смирнова, Г.М. Фихтенгольца и др. Под руководством Н.М. Гюнтера он написал дипломную работу об аналитических решениях системы дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными.

В 1929 г. после окончания университета Сергей Львович был принят в теоретический отдел Ленинградского сейсмологического института. В этот период в тесном сотрудничестве с В.И. Смирновым им решен ряд математических задач теории распространения волн.

С 1932 г. Сергей Львович работал в Математическом институте им. В.А. Стеклова в Ленинграде, а затем с 1934 г. – в Москве. В этот период он предложил новый метод решения задачи Коши для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами, основанный на обобщении формулы Кирхгофа. Работы, связанные с гиперболическими уравнениями, привели Сергея Львовича к пересмотру классического понятия решения дифференциального уравнения. Рассмотрение С.Л. Соболевым решений в пространствах функционалов ознаменовало начало теории обобщенных функций.

Определив понятие обобщенной производной, Сергей Львович Соболев обогатил математику пространствами функций, обобщенные производ-

ные которых интегрируемы в некоторой фиксированной степени. Эти объекты теперь называют пространствами Соболева.

В 1933 г., в возрасте 24 лет, С.Л. Соболев избран членом-корреспондентом Академии наук, а в 1939 г. он стал ее действительным членом, долгое время оставаясь самым молодым академиком в стране.

В 1940-е годы Сергей Львович Соболев изучал системы дифференциальных уравнений, опи-

сывающие малые колебания вращающейся жидкости. Сергей Львович получил условия устойчивости вращающегося волчка с полостью, заполненной жидкостью, в зависимости от формы полости и ее параметров, разобрав подробно случаи цилиндрической полости и полости – эллипсоида вращения. Эти исследования С.Л. Соболева привели к возникновению нового направления в общей теории дифференциальных уравнений в частных произ-

водных, посвященного исследованию решений задачи Коши и краевых задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно старших производных по времени.

Сергей Львович Соболев одним из первых понял значение вычислительной математики и кибернетики. С 1952 по 1960 гг. С.Л. Соболев возглавлял первую в стране кафедру вычислительной математики МГУ. Исследования С.Л. Соболева этого периода стали одним из истоков общей теории вычислительных алгоритмов, связанной с абстрактным изучением приемов решения больших систем уравнений.

Задачи вычислительной математики в его работах обычно ставятся в рамках функционального анализа. Стали крылатыми слова С.Л. Соболева о том, что теорию вычислений сейчас так же невозможно представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин.

Особо стоит выделить важную роль в становлении кибернетики и других новых направлений



Академик  
С.Л. Соболев

исследований, которую в 1950-е годы сыграли публичные выступления С.Л. Соболева, открыто вставшего на защиту науки от идеологизированного мракобесия.

Работая много лет на посту главного заместителя директора Института атомной энергии, возглавляемого И.В. Курчатовым, Сергей Львович принимал непосредственное участие в решении важных прикладных задач, имеющих оборонное значение. В январе 1952 г. С.Л. Соболев был удостоен высшей награды страны: ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда за исключительные заслуги перед государством.

Научная деятельность Сергея Львовича Соболева была неотделима от его организаторской работы в науке. В конце 1950-х годов академики М.А. Лаврентьев, С.Л. Соболев и С.А. Христианович выступили с инициативой организации нового крупного научного центра – Сибирского отделения Академии наук. Для многих ученых СО АН первого призыва веским аргументом в при-

нятии решения о переезде на работу в Новосибирск был пример Сергея Львовича Соболева, привлекательность его личности и его научный авторитет.

Сибирский период научной деятельности Сергея Львовича ознаменовался большими достижениями в теории кубатурных формул. Задача о приближенном интегрировании функций многих переменных является одной из основных и наиболее трудоемких в теории вычислений. Проблема оптимизации формул интегрирования сводится к нахождению минимума нормы функционала погрешности, заданного на некотором пространстве функций. Сергей Львович Соболев предложил оригинальные подходы к названной проблематике, ввел и изучил новые типы оптимальных кубатурных формул.

В 1989 г. ему присуждена высшая награда Российской академии наук – Золотая медаль имени М.В. Ломоносова. С.Л. Соболев скончался 3 января 1989 г. в Москве.

#### ЛОРАН ШВАРЦ

Лоран Шварц родился в Париже 5 марта 1915 г. в семье хирурга. Среди его родственников было немало выдающихся людей. Ж. Адамар был братом его бабушки. Много знаменитостей было по линии его матери Клэр Дебре (к этой фамилии принадлежало и принадлежит много незаурядных политиков голлистского толка). В 1938 году Л. Шварц женился на Мари-Элен Леви, дочери выдающегося математика П. Леви, одного из основоположников функционального анализа. Мари-Элен со временем стала математиком-профессионалом и заняла позицию полного профессора в 1963 г.

Богатое дарование Л. Шварца проявилось еще в его лицейские годы. Он стал победителем по латыни в наиболее престижном соревновании лицейстов во Франции – Concours General. Л. Шварц колебался в выборе дальнейшей специальности между «классикой» (греческим и латынью) и геометрией. Любопытно, что Адамар был не в восторге от математических интересов Л. Шварца, так как шестнадцатилетний Лоран не знал дзета-функцию Римана. Как ни удивительно, в сторону геометрии Л. Шварца подталкивали один из педагогов по классике и педиатр Робер Дебре.

Лоран поступил в Высшую Нормальную Школу после двухлетней подготовки в 1934 году вместе с Г. Шоке, победителем Concours General по

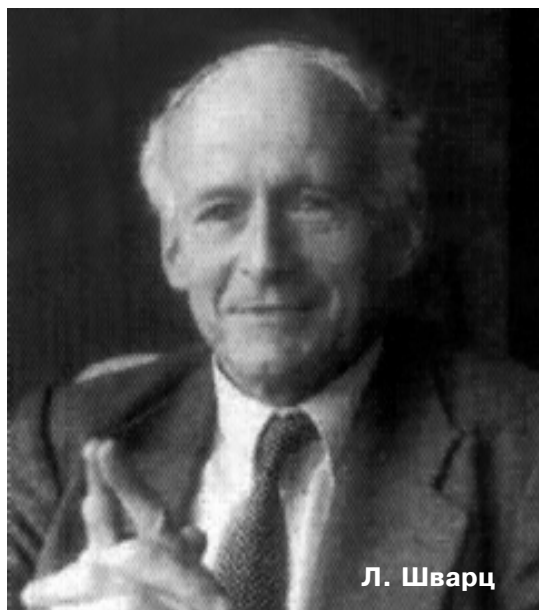
математике. Вместе с ними поступила и Мари-Элен, ставшая одной из первых слушательниц Высшей Нормальной Школы. В те годы математическую атмосферу в Высшей Нормальной Школе определяли такие люди, как Э. Борель, Э. Картан, А. Данжуа, М. Фреше, П. Монтель. В соседнем колледже Франции читал лекции А. Лебег и вел семинары Ж. Адамар. В студенческие годы возникла и укрепилась неистребимая любовь Л. Шварца к теории вероятностей под воздействием бесед с будущим тестем Полем Леви.

Вскоре после окончания Высшей Нормальной Школы Л. Шварц решил пройти обязательную военную службу (сроком 2 года), и в 1939-1940 годы он остался на службе ввиду военного времени. Военные годы были особенно тяжелыми для молодой четы Шварцев – как евреи они не могли оставаться в оккупированной зоне и вынуждены были покинуть родной север и жить на небольшие и не слишком определенные стипендии (в частности, от фонда Мишлена, всемирно известной фирмы по производству шин). В 1941 году Л. Шварц встретился в Тулузе с А. Картаном и Ж. Дельсартом, которые посоветовали молодой чете перебраться в Клемон-Ферран, где в те годы собрались вытесненные немцами профессора Страсбургского университета Ж. Дьедонне, Ш. Эресманн, А. Лихнерович, С. Мандельброт.

Там Л.Шварц написал кандидатскую диссертацию по приближению непрерывной функции на оси суммами экспонент.

К сожалению, в математическую судьбу Лорана Шварца опять вмешалась война – семья вынуждена была скитаться под чужими документами. Любопытно, что при открытии распределений в ноябре 1944 г. Л.Шварц жил под фамилией Селимартин. Основы своей теории Л. Шварц опубликовал в *Анналах Гренобльского университета* в 1945 году. Процесс своего открытия он сам характеризовал как «церебральную перколяцию». После года работы в Гренобле Л. Шварц получает позицию в Нанси, где попадает в самый центр «бурбакизма» – как известно, Н.Бурбаки жил в Нанкаго, смеси Нанси и Чикаго. В Чикаго был Анри Вейль, а в Нанси – Ж.Дельсарт, Ж.Дьедонне. Вскоре Л. Шварц был введен в состав группы Бурбаки. В 1950 году он получил Филдсовскую медаль за теорию распределений, а затем увидел свет его знаменитый двухтомник «*Theory les Distributiones*».

В 1952 г. Л. Шварц вернулся в Париж и стал работать сначала в Сорбонне, а с 1959 г. – в Политехнической Школе (где работал его тесть П.Леви). Прямыми учениками Л. Шварца были



Л. Шварц

многие знаменитости, среди них А.Гротендик, Ж.-Л.Лионс, В.Мальгранж и А.Мартино.

Л.Шварц писал: «Чтобы совершить открытие в математике, надо преодолеть сдержанность и традицию. Нельзя двигаться вперед, не будучи подрывным элементом». Это высказывание хорошо коррелирует с чрезвычайно активной и разноплановой общественной деятельностью Л.Шварца. Став в юности троцкистом из протеста против капитали-

стических мерзостей и сталинского террора 1930-х годов, он никогда в своей жизни не мирился с тем, что воспринимал как нарушение прав человека, угнетение и несправедливость. Он был активным борцом против американской войны во Вьетнаме и советского вторжения в Афганистан. Сражался за освобождение ряда математиков, преследуемых по политическим мотивам, среди них Хосе Луи Массера, Вацлав Бенда и др.

Л. Шварц был выдающимся лепидоптеристом и обладал коллекцией, насчитывающей более 20 тысяч бабочек. Не случайно изображения бабочек украшают суперобложку второго издания его «Теории распределений».

Лоран Шварц скончался 4 июля 2002 года в Париже.

### УСПЕХИ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В основе теории распределений лежит стремление применить технологии функционального анализа для исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Функциональный анализ характеризуется алгебраизацией, геометризацией и социализацией аналитических задач. Под социализацией обычно понимают включение конкретной задачи в целый класс аналогичных проблем. Социализация позволяет стереть «случайные черты» – избавиться от трудностей, привносимых чрезмерной спецификой задачи. К началу 1930-х годов достоинства функционального анализа уже были продемонстрированы в сфере интегральных уравнений. На повестке дня стояли уравнения дифференциальные.

Следует подчеркнуть, что размышления над

природой интегрирования и дифференцирования лежат в основе большинства теорий современного функционального анализа. Это неудивительно, ввиду особой роли этих замечательных линейных операций. Общеизвестно, что интегрирование обладает более привлекательными свойствами по сравнению с дифференцированием: эта операция монотонна и повышает гладкость. Указанные приятные свойства начисто отсутствуют у оператора дифференцирования. Всем известно, что классическое дифференцирование – это замкнутый, но не непрерывный оператор (в естественной топологии, порожденной метрикой Чебышева). Ряды гладких функций, вообще говоря, нельзя дифференцировать почленно, что существенно затрудняет приме-

нение аналитических средств для решения дифференциальных уравнений.

В настоящее время мало кто усомнится в том, что центральным в теории распределений является понятие обобщенной производной. Производная рассматривается теперь как оператор, действующий на негладкие функции по тем же интегральным законам, которым подчиняется процедура взятия классической производной. На предложенном пути стало возможным капитально расширить запас формул дифференцирования. В частности, оказалось, что любые распределения обладают производными любых порядков, поточечно сходящиеся ряды распределений можно сколько угодно раз дифференцировать почленно, а многие «традиционно расходящиеся» ряды Фурье допускают суммирование в виде явных формул. Математика приобрела дополнительные фантастические степени свободы, что обессмертило имя С.Л. Соболева как пионера нового исчисления.

Развернутые изложения достижений новой теории появились в свет практически одновременно. В 1950 г. в Париже вышел первый том «Теории распределений» Л.Шварца, а в Ленинграде – книга С.Л.Соболева «Некоторые применения функционального анализа в математической физике». В 1962 г. Сибирское отделение издало репринт этой книги, а в 1963 г. вышел в свет ее английский перевод в США. Второе издание книги Л.Шварца было немного расширено (за счет включения обобщенной версии теории по-

токов Ж. де Рама) и опубликовано в 1966 г. Любопытно, что Л.Шварц практически не изменил историческое введение к книге.

Предложенные теорией распределений новые методы оказались столь сильными, что позволили выписать в некотором явном виде общее решение произвольного дифференциального уравнения в частных производных в случае, когда коэффициенты при производных постоянны. Дело сводится к наличию фундаментальных решений – частных решений, отвечающих случаю, когда в правой части уравнения поставлена дельта-функция П. Дирака. Существование таких решений было установлено уже в 1953-54 гг. в работах Б.Мальгранжа и Л. Эренпрайса независимо друг от друга. Но лишь в 1994 году фундаментальное решение было выписано явно. Факт существования фундаментального решения у произвольного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами по праву носит название *теоремы Мальгранжа – Эренпрайса*. Трудно переоценить это замечательное достижение, ставшее одним из триумфов абстрактной теории топологических векторных пространств.

Путь от обобщенных решений к классическим лежит через пространства Соболева. Исследование вложений и следов пространств Соболева и их обобщений стало одним из основных направлений современной теории функций вещественной переменной. Десятки книг упоминают в своем названии пространства Соболева.

### КЛАССИЦИЗМ И РОМАНТИЗМ

Размышляя о судьбах С.Соболева и Л.Шварца, невозможно обойти вопрос о причинах поляризации оценок, касающихся математического открытия, связанного с их именами. Наивно полагать, что этот вопрос когда-либо получит простой и полный ответ, убедительный для всех и каждого. Достаточно обратиться к имеющемуся опыту, касающемуся других знаменитых пар математиков, споры о судьбе и творчестве которых продолжаются иногда столетиями, вызывая резкие столкновения мнений по сей день. Думается, что истоки этого явления довольно универсальны и заключены не только в особенностях личностей этих людей, но и, не в последнюю очередь, в природе самого математического творчества.

Прибегая к несколько рискованной аналогии с искусством, можно отметить, что математике как науке присущи черты, ассоциирующиеся с теми направлениями в искусстве, которые принято называть классицизмом и романтизмом. Трудно не увидеть классические черты эллинской традиции в сочинениях Евклида, И. Ньютона, Я.Больяи, Д. Гильберта и Н.Бурбаки. Невозможно не отозваться на аккорды романтического гимна человеческому гению, звучащие со страниц сочинений Диофанта, Г.В. Лейбница, Н. И.Лобачевского, А. Пуанкаре и В.И. Арнольда.

Лучшие черты математического классицизма и романтизма нашли воплощение в творчестве С.Л. Соболева и Л. Шварца. Эти люди и их достижения навсегда останутся с нами...

Новосибирск, 2003